

## 物理問題 I

(1)

$$\boxed{\text{ア}} \quad \frac{mg}{k}$$

解説

点 B では小球が受ける重力とひもからの弾性力が釣り合っている。

$$\text{このときのひもの自然長からの伸びを } y_0 \text{ とおくと, } ky_0 = mg \quad \therefore y_0 = \frac{mg}{k}$$

$$\text{ゆえに, 点 B の位置は } y = -l - y_0 = -l - \frac{mg}{k}$$

(2)

$$\boxed{\text{イ}} \text{ ③ } \quad \boxed{\text{ウ}} \text{ 点 B を中心に振幅 } \frac{mg}{k}, \text{ 周期 } 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \text{ の単振動運動}$$

解説

点 A は単振動の振動上端だからひもの長さは常に自然長以上である。

したがって、小球は、常にばね定数  $k$  のばねのようにふるまうゆえ、単振動をする。

小球の座標を  $(0, y)$  とすると、小球の自然長からの変位  $\Delta y = y - (-l) = y + l < 0$

$$\text{弾性力は正だから, 弾性力} = -k\Delta y = -k(y+l) \quad \dots \text{①}$$

$$\text{重力は負だから, 重力} = -mg \quad \dots \text{②}$$

よって、小球に働く  $y$  軸方向の外力の和を  $F$  とすると、

$$\text{①, ②より, } F = -k(y+l) - mg = -k\left(y+l + \frac{mg}{k}\right)$$

$$\text{ゆえに, 小球の加速度を } a \text{ とすると, その単振動の運動方程式は } ma = -k\left(y+l + \frac{mg}{k}\right)$$

$$\text{これより, 振動中心は } y = -l - \frac{mg}{k}, \text{ すなわち点 B, 振動周期} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$\text{また, 振幅} = \text{静止点 A (振動端) と振動中心 B (つり合いの位置) の距離} = \frac{mg}{k} \text{ より,}$$

最下点 (振動下端) は点 B より  $\frac{mg}{k}$  下の位置である。

補足：最下点を力学的エネルギー保存則から求める場合

点 A を重力の位置エネルギーの基準位置，最下点の  $y$  座標を  $y_C$  とする。

	点A	最下点
$y$ 座標	$-l$	$y_C$
重力の位置エネルギー	0	$mg\{y_C - (-l)\}$
弾性エネルギー	0	$\frac{1}{2}k\{y_C - (-l)\}^2$
運動エネルギー	0	0

力学的エネルギー保存則より， $0+0+0=mg\{y_C - (-l)\} + \frac{1}{2}k\{y_C - (-l)\}^2$

$$\therefore \frac{1}{2}(y_C + l)(ky_C + kl + 2mg) = 0$$

これと  $y_C + l \neq 0$  より， $ky_C + kl + 2mg = 0 \quad \therefore y_C = -l - \frac{2mg}{k} = \left(-l - \frac{mg}{k}\right) - \frac{mg}{k}$

$-l - \frac{mg}{k}$  は点 B の  $y$  座標はだから，最下点は点 B より  $\frac{mg}{k}$  下の位置である。

(3)

$$\boxed{\text{エ}} \quad \sqrt{2g(l+s) - \frac{k}{m}s^2}$$

解説

原点 O ( $y=0$ ) を重力の位置エネルギーの基準位置とすると。

注意：ひもは伸びているときだけ弾性力をもつ。

力学的エネルギー	$y=0$	$y=-l-s$ ( $s \geq 0$ )
重力の位置エネルギー	0	$mg\{(-l-s)-0\}$
弾性エネルギー	0	$\frac{1}{2}k\{(-l-s)-(-l)\}^2$
運動エネルギー	0	$\frac{1}{2}mv^2$

力学的エネルギー保存則より，

$$0+0+0 = -mg\{0 - (-l-s)\} + \frac{1}{2}k\{(-l-s) - (-l)\}^2 + \frac{1}{2}mv^2 \quad \therefore v^2 = 2g(l+s) - \frac{k}{m}s^2$$

ゆえに， $v = \sqrt{2g(l+s) - \frac{k}{m}s^2}$

$$\boxed{イ} \quad \frac{mg}{k} \sqrt{1 + \frac{2kl}{mg}}$$

解説

最下点に達すると  $\boxed{イ}$  の  $v = \sqrt{2g(l+s) - \frac{k}{m}s^2}$  が 0 になるから、 $\sqrt{2g(l+s) - \frac{k}{m}s^2} = 0$

これより、 $2g(l+s) - \frac{k}{m}s^2 = 0 \quad \therefore ks^2 - 2mgs - 2mgl = 0$  (ただし、 $s > 0$ )

この方程式を解くと、 $s = \frac{mg + \sqrt{(mg)^2 + 2mgkl}}{k} = \frac{mg}{k} + \frac{mg}{k} \sqrt{1 + \frac{2kl}{mg}}$

よって、最下点の位置は、 $y = -l - \left( \frac{mg}{k} + \frac{mg}{k} \sqrt{1 + \frac{2kl}{mg}} \right)$

これと点 B の位置が  $y = -l - \frac{mg}{k}$  であることから、

小球が達する最下点は点 B より距離  $\frac{mg}{k} \sqrt{1 + \frac{2kl}{mg}}$  だけ下にある。

$$\boxed{カ} \quad \sqrt{2gl}$$

解説

解法 1：定性的に解く

小球に働く重力の大きさは一定であるが、  
弾性力の大きさ、すなわち復元力の大きさ（自然長に戻ろうとする力の大きさ）は  
点 A から下に向かって増加していき、点 B で重力と弾性力（復元力）がつり合う。  
したがって、AB 間は「重力（下向き）の大きさ > 弾性力（上向き）の大きさ」であり、  
小球は下向きに加速される。

よって、AB 間で小球の速度の大きさが最小となる位置は点 A である。

点 A の位置は  $y = -l + s = -l + 0$  だから、

点 A での速さは、 $v = \sqrt{2g(l+s) - \frac{k}{m}s^2}$  に  $s = 0$  を代入することにより、 $v = \sqrt{2gl}$

解法 2：定量的に解く

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{2g(l+s) - \frac{k}{m}s^2} \\ &= \sqrt{-\frac{k}{m}s^2 + 2gs + 2gl} \\ &= \sqrt{-\frac{k}{m}\left(s^2 - \frac{2mg}{k}\right) + 2gl} \end{aligned}$$

$$= \sqrt{-\frac{k}{m} \left( s - \frac{mg}{k} \right)^2 + \frac{mg^2}{k} + 2gl}$$

求めるのは、小球が初めて点 A ( $y = -l$ ) に達してから初めて点 B ( $y = -l - \frac{mg}{k}$ ) に達する

までの間における速度の大きさの最小値だから、 $-l - \frac{mg}{k} \leq -l - s \leq -l$  より、 $0 \leq s \leq \frac{mg}{k}$

よって、 $v$  の大きさが最小となるのは  $s = 0$ 、すなわち小球が点 A に達したときであり、

そのときの速さは  $v = \sqrt{2gl}$

キ  $\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$

解説

周期  $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$  の  $\frac{1}{2}$  だから、 $\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$

補足：(3)の最後部「したがって、所要時間  $T_0$  は・・・」からの記述についての解説

小球が初めて点 A に達してから次に点 A にもどってくるまでの所要時間  $T_0$  について

$T_0 = \text{AB間の所要時間} \times 2 + \text{点Bに達してから次に点Bに戻ってくるまでの所要時間}$

これと  $\text{AB間の所要時間} \times 2 < \frac{\text{AB間の距離}}{\text{AB間の最小の速さ}} \times 2 = \frac{\text{AB間の距離}}{\text{点Aでの速さ}} \times 2$  より、

$$T_0 < \frac{2 \times \frac{mg}{k}}{\sqrt{2gl}} + \pi \sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{m}{k} \sqrt{\frac{2g}{l}} + \pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

ばね定数  $k$  が非常に大きい極限のとき

小球が点 A に達してから点 A にもどってくるまでの時間  $T_0$  について

$$0 < T_0 < \frac{m}{k} \sqrt{\frac{2g}{l}} + \pi \sqrt{\frac{m}{k}}, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \frac{m}{k} \sqrt{\frac{2g}{l}} + \pi \sqrt{\frac{m}{k}} \right) = 0$$

よって、はさみうちの原理により、ばね定数  $k$  が非常に大きい極限では、

ひもが伸びている間の時間は  $\lim_{k \rightarrow \infty} T_0 = 0$

ゆえに、小球が点 A に達してから一瞬の内に点 A にもどってくる。・・・①

ひもの伸びの長さについて

この「ひもの伸びの長さ」とは最下点におけるひもの伸びの長さのことだから、

その伸びは、オの解説より、 $\frac{mg}{k} + \frac{mg}{k} \sqrt{1 + \frac{2kl}{mg}}$

よって、 $\lim_{k \rightarrow \infty} \left( \frac{mg}{k} + \frac{mg}{k} \sqrt{1 + \frac{2kl}{mg}} \right) = 0$

ゆえに、ばね定数  $k$  が非常に大きい極限では、ひもの伸びは  $0$  である。・・・②

力学的エネルギー保存則が成り立つから、

点  $A$  に達したときの速さと点  $A$  に戻ってくるときの速さは等しい。・・・③

①, ②, ③より、ばね定数  $k$  が非常に大きい極限において、小球が点  $A$  に達してから点  $A$  に戻ってくるまでの運動は、小球と点  $A$  を通り  $y$  軸に垂直な床との弾性衝突とみなしてよい。

(4)

ク  $\frac{y_1}{x_1}$

解説

ひもが点  $D$  で伸びきった後、小球が再び点  $C$  に戻るためには、  
 小球は点  $C$  から点  $D$  までの経路と逆の経路をたどらなければならない。

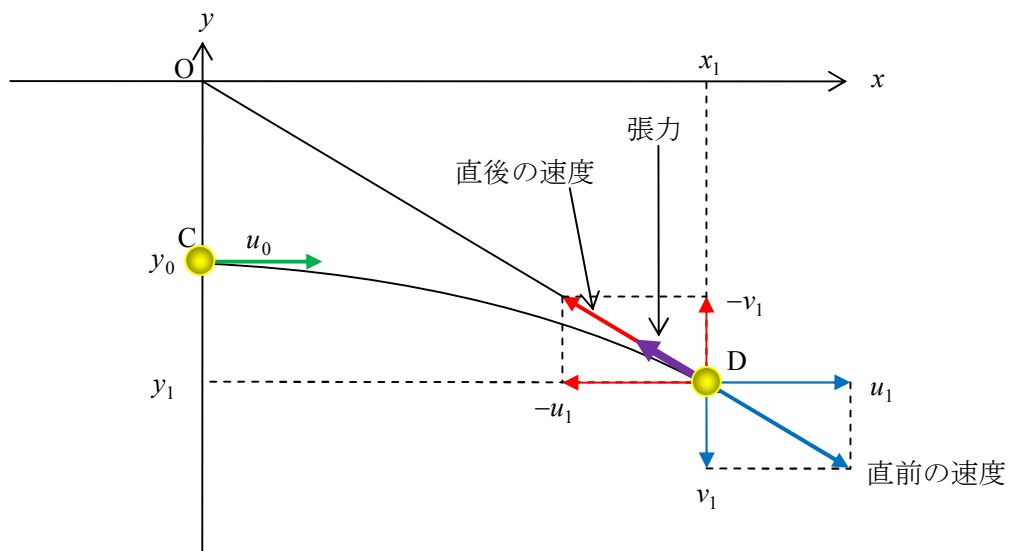
したがって、ひもが伸びきる直前の小球の速度ベクトルが  $\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}$  ならば、

その直後の小球の速度ベクトルは  $\begin{pmatrix} -u_1 \\ -v_1 \end{pmatrix}$  でなければならない。

よって、このときの運動量変化のベクトルは  $\begin{pmatrix} -2mu_1 \\ -2mv_1 \end{pmatrix}$

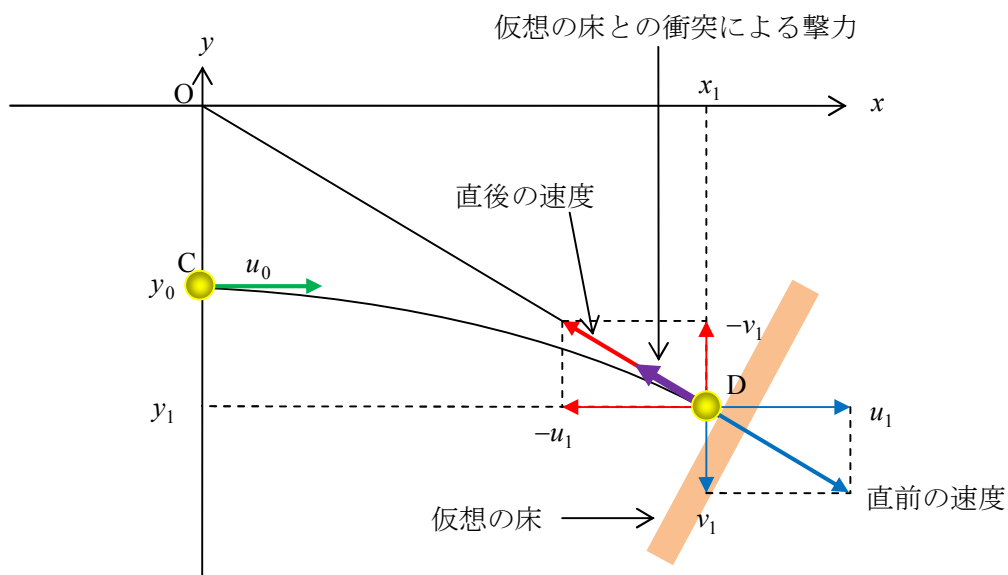
また、運動量変化は小球がひもから受けた張力の力積によるものであり、

その向きは  $\overrightarrow{DO} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -y_1 \end{pmatrix}$  の向きと一致する。ゆえに、 $\frac{v_1}{u_1} = \frac{y_1}{x_1}$  が成り立つ。



補足

(3)の最後で述べた考え方が成り立っていることを使えば、  
 小球は点 D において、OD に垂直な床に対して弾性衝突することになる。



ケ  $u_0 T$     コ  $y_0 - \frac{1}{2} g T^2$

解説

CD 間ではひもが緩んでいるから、小球は水平投射の放物運動をする。

水平方向は速度  $u_0$  の等速運動だから、 $x_1 = u_0 T$

鉛直方向は自由落下運動だから、 $y_1 = y_0 - \frac{1}{2} g T^2$

サ  $-\frac{2y_0}{g}$

解説

$u_1 = u_0$ ,  $v_1 = -gT$ ,  $x_1 = u_0 T$ ,  $y_1 = y_0 - \frac{1}{2} g T^2$  を  $\frac{v_1}{u_1} = \frac{y_1}{x_1}$  に代入すると、

$$\frac{-gT}{u_0} = \frac{y_0 - \frac{1}{2} g T^2}{u_0 T} \text{ より, } -gT^2 = y_0 - \frac{1}{2} g T^2 \quad \therefore T^2 = -\frac{2y_0}{g} > 0$$

ゆえに、 $y_0 < 0$  でなければならない。

$$\square -\frac{u_0^2}{4g} \left\{ \sqrt{1 + \left( \frac{2gl}{u_0^2} \right)^2} - 1 \right\}$$

解説

$$\begin{aligned} l^2 &= x_1^2 + y_1^2 \\ &= (u_0 T)^2 + \left( y_0 - \frac{1}{2} g T^2 \right)^2 \\ &= u_0^2 \cdot \left( -\frac{2y_0}{g} \right) + \left\{ y_0 - \frac{1}{2} g \cdot \left( -\frac{2y_0}{g} \right) \right\}^2 \\ &= -\frac{2u_0^2}{g} y_0 + 4y_0^2 \\ \therefore 4y_0^2 - \frac{2u_0^2}{g} y_0 - l^2 &= 0 \quad (\text{ただし, } y_0 < 0) \end{aligned}$$

ゆえに,

$$\begin{aligned} y_0 &= \frac{\frac{u_0^2}{g} - \sqrt{\left( \frac{u_0^2}{g} \right)^2 + 4l^2}}{4} \\ &= \frac{\frac{u_0^2}{g} - \frac{u_0^2}{g} \sqrt{1 + \left( \frac{2gl}{u_0^2} \right)^2}}{4} \\ &= -\frac{u_0^2}{4g} \left\{ \sqrt{1 + \left( \frac{2gl}{u_0^2} \right)^2} - 1 \right\} \end{aligned}$$

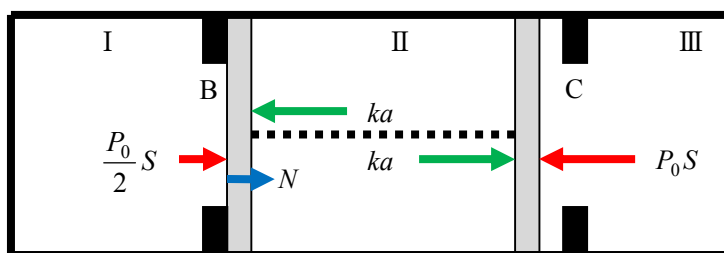
物理問題 II

イ  $\frac{P_0 S}{a}$

解説

ばね定数を  $k$  とすると, ピストン C に作用する力のつり合いより,  $ka = P_0 S \quad \therefore k = \frac{P_0 S}{a}$

ピストンに働く力の図示



$N$  はストッパーから受ける抗力

過程(1) 定積変化

ロ  $2T_0$

解説

ピストン B がストッパー  $N_1$  から離れ始めるのは,  
 ピストン B に働くストッパーの抗力  $N$  が 0 になったとき,  
 すなわち, 領域 I の圧力が  $P_0$  になったときである。

また, 領域 I の単原子理想気体分子の体積と物質量は変化しないことと

理想気体の状態方程式  $PV = nRT$  より,  $\frac{T}{P} = \frac{V}{nR} = \text{一定}$

よって, 求める温度を  $T_1$  とすると,  $\frac{T_1}{P_0} = \frac{T_0}{\frac{P_0}{2}}$  より,  $T_1 = 2T_0$



$$\square \frac{3P_0 Sa r}{V^2}$$

**解説**

ピストンが離れ始めるまでにかかった時間を  $t$  とすると、

$$\text{抵抗で発生した熱エネルギー} = \text{消費電力} \times \text{時間} = \frac{V^2}{r} t \left( \because IVt = \frac{V}{r} \cdot Vt \right)$$

これがすべて気体に吸収されるから、気体が吸収した (熱) エネルギーを  $Q$  とすると、

$$Q = \frac{V^2}{r} t \quad \dots \textcircled{1}$$

定積変化だから、 $Q$  はすべて内部エネルギーの増加  $\Delta U = nC_v \Delta T$  になる。

$$\text{すなわち } Q = nC_v \Delta T$$

これと単原子分子の定積モル比熱  $C_v = \frac{3}{2} R$  および  $\Delta T = 2T_0 - T_0 = T_0$  より、

$$Q = \frac{3}{2} nRT_0 \quad \dots \textcircled{2}$$

また、領域 I の最初の状態における気体の状態方程式  $\frac{P_0}{2} \cdot 4Sa = nRT_0$  より、

$$nRT_0 = 2P_0 Sa \quad \dots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{2}, \textcircled{3} \text{ より, } Q = 3P_0 Sa$$

$$\text{これと } \textcircled{1} \text{ より, } \frac{V^2}{r} t = 3P_0 Sa$$

$$\therefore t = \frac{3P_0 Sa r}{V^2}$$

**過程(2) 定圧変化**

$$\square \frac{5}{2} T_0$$

**解説****ピストン B の変位について**

「ゆっくりと移動」とは「力が限りなくつり合った状態で移動」ということだから、領域 I の気体が圧力  $P_0$  でピストン B を右へ移動させたとしてよい。

また、圧力  $P_0$  とばねの弾性力はつり合いの関係にあるから、ばねは長さ  $L - a$  を保つ。

よって、ピストン B は右へ  $a$  移動することになる。

**ピストン B の移動後の領域 I の気体の温度について**

ピストン B の移動後の領域 I の気体の温度を  $T_2$  とする。

領域 I の気体の物質量が一定であることと  $PV = nRT$  より、 $\frac{T}{PV} = \text{一定}$

したがって,

$$\text{最初の状態の } (P, V, T) = \left( \frac{P_0}{2}, 4aS, T_0 \right) \quad \dots \textcircled{4}$$

$$\text{定圧変化過程開始時点の } (P, V, T) = (P_0, 4aS, 2T_0) \quad \dots \textcircled{5}$$

$$\text{定圧変化過程終了時点の } (P, V, T) = (P_0, 5aS, T_2) \quad \dots \textcircled{6}$$

について,

$$\textcircled{6} \text{ と } \textcircled{4} \text{ より, } \frac{T_2}{P_0 \cdot 5aS} = \frac{T_0}{\frac{P_0}{2} \cdot 4aS} \quad \therefore T_2 = \frac{5}{2} T_0$$

または,

$$\textcircled{6} \text{ と } \textcircled{5} \text{ より, } \frac{T_2}{P_0 \cdot 5aS} = \frac{2T_0}{P_0 \cdot 4aS} \quad \therefore T_2 = \frac{5}{2} T_0$$

$$\boxed{\text{ホ}} \quad \frac{5}{2} P_0 Sa$$

### 解説

#### 解法 1: 定圧モル比熱で解く

定圧変化だから,  $Q = nC_p \Delta T$  が成り立つ。

これと単原子分子の定圧モル比熱  $C_p = \frac{5}{2} R$ ,  $\Delta T = \frac{5}{2} T_0 - 2T_0 = \frac{T_0}{2}$  より,

$$Q = nC_p \Delta T = n \times \frac{5}{2} R \times \frac{T_0}{2} = \frac{5}{4} nRT_0$$

これと③すなわち  $nRT_0 = 2P_0 Sa$  より,  $Q = \frac{5}{2} P_0 Sa$

#### 解法 2: エネルギー保存則 (熱力学第一法則) で解く

吸収した熱  $Q$  は領域 I の内部エネルギーの増加  $\Delta U$  と気体がする仕事  $W$  に変化するから,

$$Q = \Delta U + W$$

$$\Delta U = nC_v \Delta T = n \times \frac{3}{2} R \times \left( \frac{5}{2} T_0 - 2T_0 \right) = \frac{3}{4} nRT_0$$

これと③すなわち  $nRT_0 = 2P_0 Sa$  より,  $\Delta U = \frac{3}{2} P_0 Sa$

$$\text{また, } W = P_0 \Delta V = P_0 (5Sa - 4Sa) = P_0 Sa$$

$$\text{よって, } Q = \Delta U + W = \frac{3}{2} P_0 Sa + P_0 Sa = \frac{5}{2} P_0 Sa$$

## 過程(3)

㊦  $6T_0$

## 解説

領域 I の気体の物質量が一定であることと  $PV = nRT$  より,  $\frac{T}{PV} = \text{一定}$

ばねの長さが  $L - 2a$  になったとき, ばねは自然長より  $2a$  縮んでいることと

㊦の解説  $ka = P_0S$  より, このときの領域 I の圧力は  $2P_0$  である。

よって, 求める温度を  $T_3$  とすると, この過程の終了時点の  $(P, V, T) = (2P_0, 6aS, T_3)$

したがって,

最初の状態の  $(P, V, T) = \left(\frac{P_0}{2}, 4aS, T_0\right)$ , 等圧変化過程開始時点の  $(P, V, T) = (P_0, 4aS, 2T_0)$ ,

等圧変化過程終了時点の  $(P, V, T) = \left(P_0, 5aS, \frac{5}{2}T_0\right)$  のいずれかと  $(P, V, T) = (2P_0, 6aS, T_3)$

について  $\frac{T}{PV} = \text{一定}$  を適用すれば,  $T_3$  が求められる。

たとえば,  $(P, V, T) = (2P_0, 6aS, T_3)$  と  $(P, V, T) = \left(\frac{P_0}{2}, 4aS, T_0\right)$  に  $\frac{T}{PV} = \text{一定}$  を適用すると,

$$\frac{T_3}{2P_0 \cdot 6aS} = \frac{T_0}{\frac{P_0}{2} \cdot 4aS} \quad \therefore T_3 = 6T_0$$

㊧  $12P_0Sa$

## 解説

$$Q = \Delta U + W$$

$$\Delta U = nC_v \Delta T = n \times \frac{3}{2} R \times \left(6T_0 - \frac{5}{2}T_0\right) = \frac{21}{4} nRT_0$$

$$\text{これと③すなわち } nRT_0 = 2P_0Sa \text{ より, } \Delta U = \frac{21}{2} P_0Sa$$

$$\text{「気体がした仕事 } W = \text{ばねの弾性エネルギー変化} \text{」より, } W = \frac{1}{2} k(2a)^2 - \frac{1}{2} ka^2 = \frac{3}{2} ka^2$$

$$\text{これと㊦すなわち } k = \frac{P_0S}{a} \text{ より, } W = \frac{3}{2} P_0Sa$$

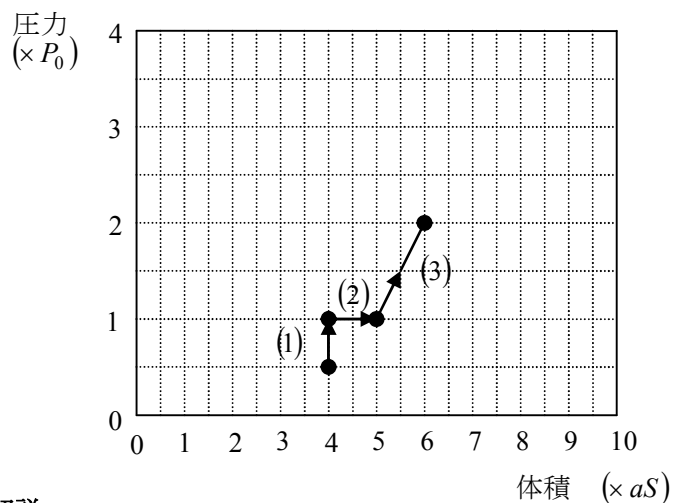
$$\text{よって, } Q = \Delta U + W = \frac{21}{2} P_0Sa + \frac{3}{2} P_0Sa = 12P_0Sa$$

## 補足

熱力学第一法則とは, エネルギー保存則のことである。

したがって, **熱力学第一法則の問題では, エネルギー保存則を念頭に入れること。**

問 1



解説

$(P, V)$  ( $P$ は圧力,  $V$ は体積) について,

過程(1)

定積変化だから, 始点を  $\left(4aS, \frac{P_0}{2}\right)$ , 終点を  $(4aS, P_0)$  とする縦軸と平行な直線

グラフでは, 始点  $\left(4, \frac{1}{2}\right)$  と終点  $(4, 1)$  を直線で結べばよい。

過程(2)

定圧変化だから, 始点を  $(4aS, P_0)$ , 終点を  $(5aS, P_0)$  とする横軸と平行な直線

グラフでは, 始点  $(4, 1)$  と終点  $(5, 1)$  を直線で結べばよい。

過程(3)

ピストン B はゆっくりと移動するから,

領域 I の気体分子がピストン B におよぼす力と

ばねの弾性力がピストン B におよぼす力が釣り合いながらピストン B が移動する。

これと, 終点の体積  $= 6aS$ , 終点の圧力  $= \frac{2ka}{S} = \frac{2 \cdot \frac{P_0 S}{a} \cdot a}{S} = 2P_0$  より,

始点を  $(5aS, P_0)$  終点を  $(6aS, 2P_0)$  とする線分となる。

グラフでは, 始点  $(5, 1)$  と終点  $(6, 2)$  を直線で結べばよい。

詳述

ばねが自然長から  $\Delta x$  縮んだときの気体の圧力変化  $\Delta P = \frac{k}{S} \Delta x$

これと  $k = \frac{P_0 S}{a}$ , 体積変化を  $\Delta V$  とすると  $\Delta V = S \Delta x$  より,

$$\begin{aligned}\Delta P &= \frac{k}{S} \Delta x \\ &= \frac{P_0 S}{a} \frac{\Delta V}{S} \\ &= \frac{P_0}{Sa} \Delta V\end{aligned}$$

よって、体積変化とは圧力変化は比例関係にあり、その傾き（比例定数）は  $\frac{P_0}{Sa}$

グラフでは、 $Sa = P_0 = 1$  とするから、その傾きは 1

#### 過程(4)

$$\boxed{\text{チ}} \quad \frac{20}{3} T_0$$

#### 解説

領域 I と領域 II を合わせた系で考える。

断熱系だから、系外との熱エネルギーのやりとりは 0 である。

また、ピストン C が動かないから、この系が系外に対してする仕事も 0 である。

よって、系内部のエネルギーは増えも減りもしない。すなわち保存される。

つまり、気体分子の熱運動エネルギーとばねの弾性エネルギーの和が保存される。

過程の開始時

$$\text{気体分子の熱運動エネルギー} = \frac{3}{2} nR \cdot 6T_0$$

$$\text{ばねの弾性エネルギー} = \frac{1}{2} k(2a)^2 = 2ka^2$$

ばねが自然長に戻ったとき

$$\text{気体の温度を } T_4 \text{ とすると、気体分子の熱運動エネルギー} = \frac{3}{2} nRT_4$$

$$\text{ばねの弾性エネルギー} = \frac{1}{2} k \cdot 0^2 = 0$$

よって、系内部のエネルギー保存則の式は

$$\frac{3}{2} nR \cdot 6T_0 + 2ka^2 = \frac{3}{2} nRT_4 + 0 \text{ より、 } T_4 = 6T_0 + \frac{4ka^2}{3nR}$$

$$\textcircled{3} \text{ より、 } nR = \frac{2P_0 Sa}{T_0}, \quad \boxed{\text{イ}} \text{ より、 } k = \frac{P_0 S}{a} \text{ だから、}$$

$$\text{これらを代入することにより、 } T_4 = \frac{20}{3} T_0$$

$$\boxed{\text{J}} \quad \frac{3}{28}$$

**解説**

系内の圧力を  $P_4$ 、ピストン C がストッパー  $N_2$  から受ける抗力の大きさを  $N$  とすると、  
ピストンに働く力のつり合いより、 $P_4 S = P_0 S + N$   
よって、 $P_4 \geq P_0$  ……⑨

理想気体の状態方程式より、 $P_4 \cdot S(4a + L) = nR \cdot \frac{20}{3} T_0$

これと③すなわち  $nRT_0 = 2P_0 Sa$  より、 $nR = \frac{2P_0 Sa}{T_0}$

よって、 $P_4 \cdot S(4a + L) = \frac{2P_0 Sa}{T_0} \cdot \frac{20}{3} T_0 \quad \therefore P_4 = \frac{40a}{3(4a + L)} P_0$

これと⑨より、 $\frac{40a}{3(4a + L)} P_0 \geq P_0 \quad \therefore 28a \geq 3L$

ゆえに、 $\frac{a}{L} \geq \frac{3}{28}$

### 物理問題 III

(1)

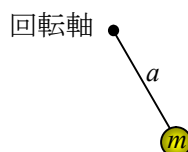
あ  $\sqrt{\frac{g}{a}}$

解説

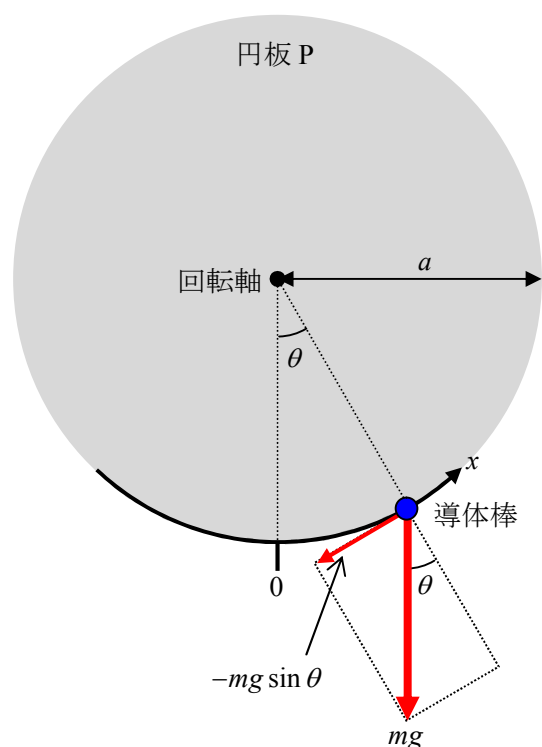
導体棒を電流が流れないから、導体棒は重力を受けて単振動をする。

したがって、質量が無視できる糸につながれた質量  $m$  のおもりの単振動と同じ。

$$\therefore \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\pi\sqrt{\frac{a}{g}}} = \sqrt{\frac{g}{a}}$$



詳細



図の向きに  $x$  軸をとると、導体棒の運動方程式： $m \frac{dx}{dt} = -mg \sin \theta$

$\theta_0$  が微小角のとき  $\sin \theta = \theta$  としてよいから、 $\theta = \frac{x}{a}$  より、 $m \frac{dx}{dt} = -\frac{mg}{a} x$  となる。

よって、このとき導体棒は周期  $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{\frac{mg}{a}}} = 2\pi \sqrt{\frac{a}{g}}$  の単振動運動をする。

結局、質量が無視できる糸につながれた質量  $m$  のおもりの単振動と同じである。

□  $BL\theta_0\sqrt{ga}$  あるいは  $BL\sqrt{2ga(1-\cos\theta_0)}$

$BL\theta_0\sqrt{ga}$  は導体棒の単振動運動から求めたもので、 $\theta_0$  が微小であるという条件つき。

よって、厳密には  $BL\sqrt{2ga(1-\cos\theta_0)}$  が正しく、 $BL\theta_0\sqrt{ga}$  はその近似式（後述）である。

しかし、□  $\omega = \sqrt{\frac{g}{a}}$  からの流れに乗れば  $BL\theta_0\sqrt{ga}$  となる。

**解説**

誘導起電力の大きさが最大になるのは導体棒の速さが最大になるときで、その速さを  $|v_{\max}|$  とすると、誘導起電力の最大値は  $|v_{\max}|BL$

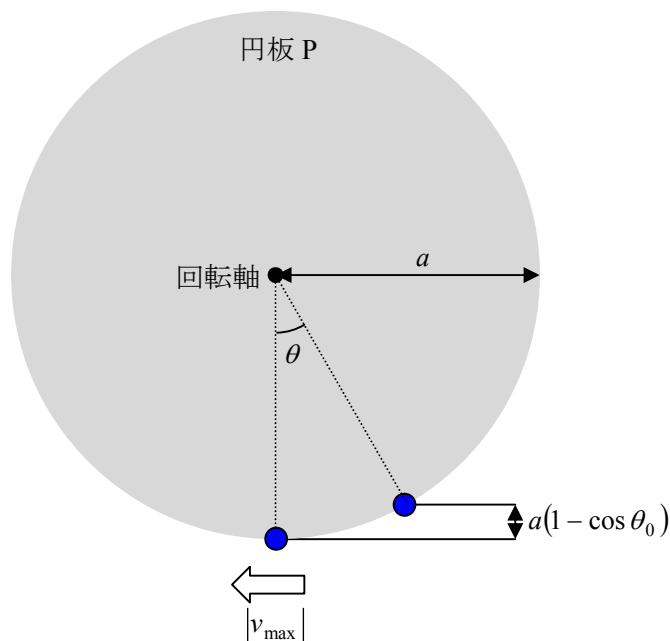
□ **の結果を利用した場合**

振幅  $a\theta_0$ 、 $t=0$  のとき  $x=a\theta_0$  より、 $x=a\theta_0 \cos \omega t$   $\left(\omega = \sqrt{\frac{g}{a}}\right)$

よって、導体棒の速度  $v = \frac{dx}{dt} = -a\theta_0\omega \sin \omega t$   $\therefore |v_{\max}| = a\theta_0\omega = a\theta_0\sqrt{\frac{g}{a}} = \theta_0\sqrt{ga}$

ゆえに、誘導起電力の最大値  $= |v_{\max}|BL = BL\theta_0\sqrt{ga}$

**力学的エネルギー保存則を用いた場合**





導体棒の最下点を重力の位置エネルギーの基準位置とすると、  
最高点と最下点について、力学的エネルギー保存則より、

$$\frac{1}{2} m |v_{\max}|^2 = m g a (1 - \cos \theta_0) \quad \therefore |v_{\max}| = \sqrt{2 g a (1 - \cos \theta_0)}$$

よって、誘導起電力の最大値  $= |v_{\max}| B L = B L \sqrt{2 g a (1 - \cos \theta_0)}$

## 補足

### 関数をべき級数で表す方法

$\theta_0 \approx 0$  のとき、 $B L \sqrt{2 g a (1 - \cos \theta_0)} \approx B L \theta_0 \sqrt{g a}$  となることを示す。

関数  $f(x)$  が無限回微分可能とすると、

$f(x)$  は適当な係数  $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$  を用いて、べき級数で表せる。

すなわち  $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_n x^n + \dots$

#### べき級数

無限数列  $\{a_n\}$  と変数の累乗（「べき」という）で表される級数

例：  $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_n x^n + \dots$  ( $x$  は変数)

関数  $f(x)$  が  $x=0$  を含んだ区間で  $n$  階微分可能とすると、

各係数は次のようにして求めることができる。

$$f(0) = a_0$$

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots \text{より, } f'(0) = a_1$$

$$f''(x) = 2a_2 + 3 \cdot 2a_3 x + \dots \text{より, } f''(0) = 2a_2$$

$$\text{以下同様にして, } a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

これより、関数  $f(x)$  は次のべき級数に近似できる。

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2} x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

たとえば、 $f(x) = \cos x$  ならば、 $f'(x) = -\sin x$ ,  $f''(x) = -\cos x$ ,  $f'''(x) = \sin x$  より、

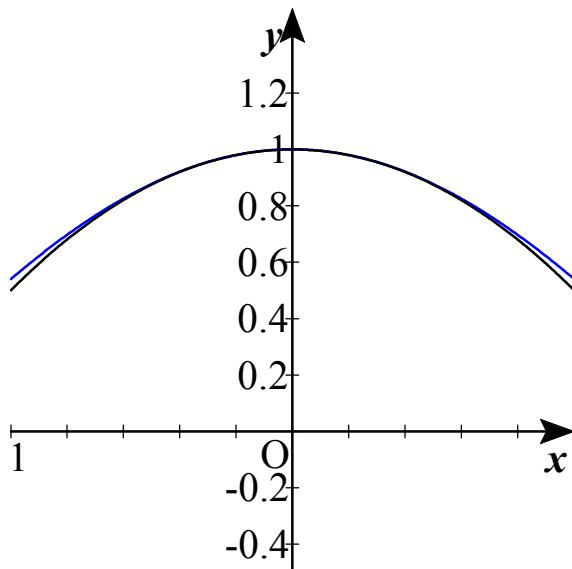
$$f(0) = 1, f'(0) = 0, f''(0) = -1, f'''(0) = 0 \text{ だから, } \cos x \approx 1 + 0 + \frac{-1}{2} x^2 + 0 = 1 - \frac{1}{2} x^2$$

よって、 $\theta_0$  が微小角のとき、すなわち  $0$  近傍のとき、 $\cos \theta_0 \approx 1 - \frac{1}{2} \theta_0^2$  となるから、

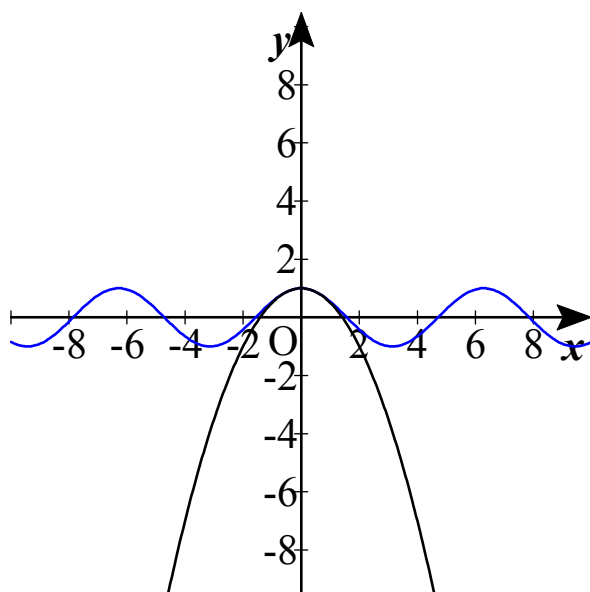
$$\begin{aligned} B L \sqrt{2 g a (1 - \cos \theta_0)} &\approx B L \sqrt{2 g a \left\{ 1 - \left( 1 - \frac{1}{2} \theta_0^2 \right) \right\}} \\ &= B L \theta_0 \sqrt{g a} \end{aligned}$$

$y = \cos x$  (青色) と  $y = 1 - \frac{1}{2}x^2$  (黒色) の  $x = 0$  付近のグラフ

2つの関数の挙動が  $x = 0$  付近で非常に似ていることがわかる。



$x = 0$  付近でないところでは、2次関数と三角関数だから挙動がまったく異なる。



### 補足

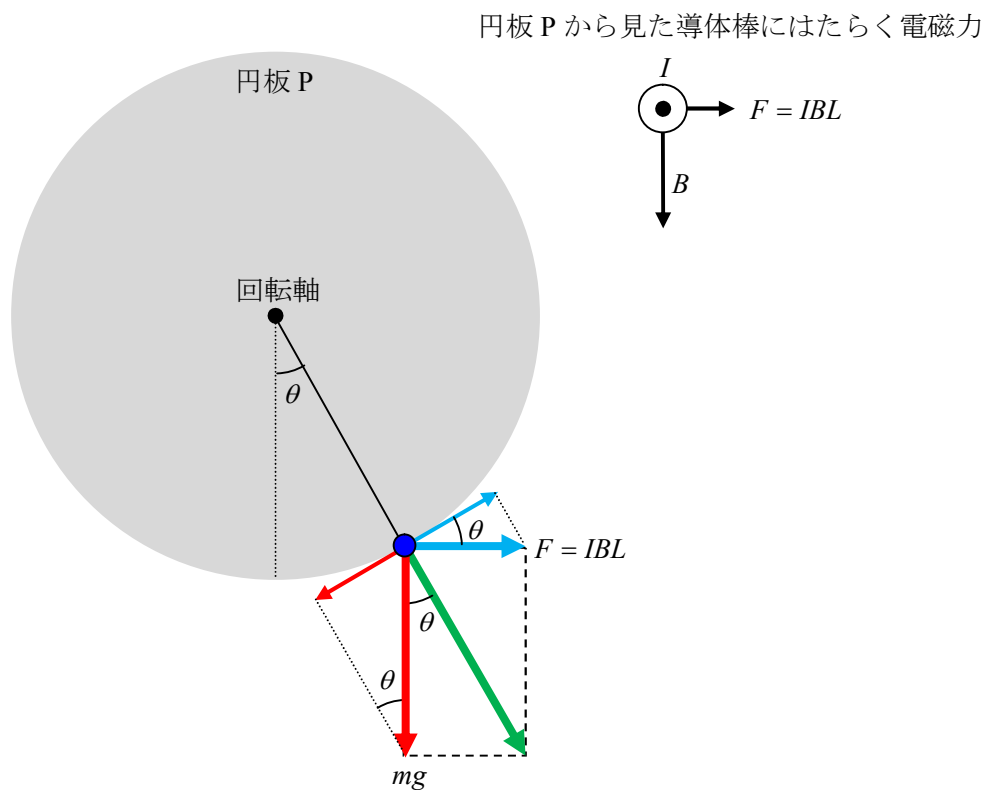
$f(x) = (1+x)^a$  ( $a$  は実数) の  $x = 0$  近傍における 3 次の近似式は,  
 $f'(x) = a(1+x)^{a-1}$ ,  $f''(x) = a(a-1)(1+x)^{a-2}$ ,  $f'''(x) = a(a-1)(a-2)(1+x)^{a-3}$  より,  
 $(1+x)^a \approx 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2}x^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{6}x^3$

ちなみに、1 次近似式は物理問題でよく使う  $(1+x)^a \approx 1 + ax$  である。

(2)

⑤  $\frac{VBL}{mgR}$

解説



解法 1

導体棒にはたらく力の円板接線成分のつり合いより,  $mg \sin \theta = IBL \cos \theta$

$$\therefore \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{IBL}{mg} = \frac{\frac{V}{R}BL}{mg} = \frac{VBL}{mgR}$$

解法 2

円板が回転しない  $\Rightarrow$  円板は接線方向の外力を受けない

$\Rightarrow$  重力と電磁力の合力は接線と垂直

$$\Rightarrow \tan \theta = \frac{IBL}{mg} = \frac{\frac{V}{R}BL}{mg} = \frac{VBL}{mgR}$$

$$\boxed{\text{え}} \quad \sqrt{\frac{g}{a} \sqrt{1 + \left(\frac{VBL}{mgR}\right)^2}}$$

**解説**

重力と電磁力の合力が見かけの重力となって、つり合いの位置を中心に単振動をする。

見かけの重力加速度を  $g'$ 、角振動数を  $\omega'$  とすると、 $\omega' = \sqrt{\frac{g'}{a}}$  ……①

$$mg' = \frac{mg}{\cos \theta} = mg \sqrt{1 + \tan^2 \theta} = mg \sqrt{1 + \left(\frac{VBL}{mgR}\right)^2} \quad \therefore g' = g \sqrt{1 + \left(\frac{VBL}{mgR}\right)^2} \quad \dots\dots ②$$

$$\text{①, ②より, } \omega' = \sqrt{\frac{g}{a} \sqrt{1 + \left(\frac{VBL}{mgR}\right)^2}}$$

(3)

お  $\sqrt{2ga(\cos \theta - \cos \theta_0)}$

解説

いと同様，円板の円周の最下点を位置エネルギーの基準とすると，  
 $\theta$  と  $\theta_0$  に位置について，力学的エネルギー保存則より，

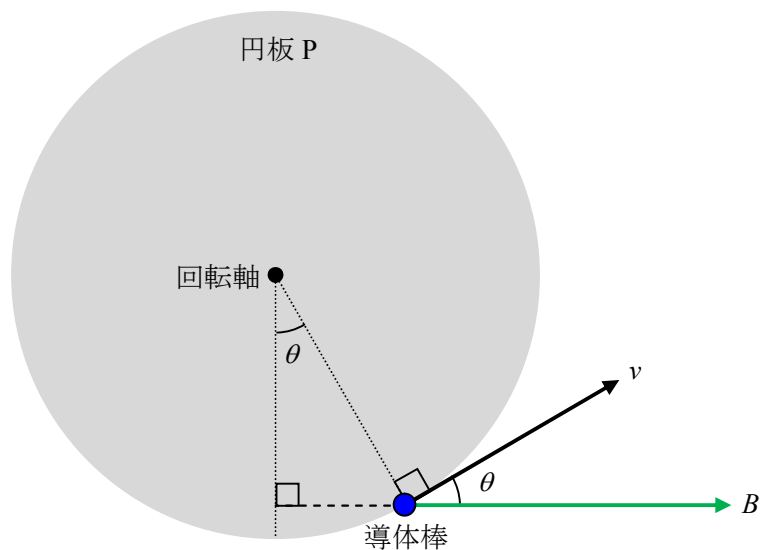
$$\frac{1}{2}mv^2 + mga(1 - \cos \theta) = 0 + mga(1 - \cos \theta_0) \quad \therefore v = \sqrt{2ga(\cos \theta - \cos \theta_0)}$$

か  $BL \sin \theta \sqrt{2ga(\cos \theta - \cos \theta_0)}$

解説

$v$  の  $B$  に対する垂直成分は  $v \sin \theta$  だから，

$$\text{起電力は } v \sin \theta \cdot BL = BL \sin \theta \sqrt{2ga(\cos \theta - \cos \theta_0)}$$



補足：起電力の正負について

导体棒の運動の向きと  $B$  の向きから，

导体棒中の正電荷は  $P \rightarrow Q$  の向きにローレンツ力を受ける。

よって， $Q$  側は  $P$  側に対し高電位になる。

ゆえに，起電力の正負は，その向きが  $P \rightarrow Q$  であることより，正である。

$$\text{これと } 0 < \theta < \pi \text{ より， } \sin \theta > 0 \text{ だから， } V = BL \sin \theta \sqrt{2ga(\cos \theta - \cos \theta_0)}$$

き (f)

解説

$$|V| = |BL \sin \theta| \sqrt{2ga(\cos \theta - \cos \theta_0)}$$

$V = 0$  となるのは、 $\cos \theta - \cos \theta_0 = 0$  または  $\sin \theta = 0$ 、すなわち  $\theta = \theta_0, -\theta_0, 0$  のとき  
 これと、 $\theta = \theta_0$  を  $t = 0$  とすることから、

振動の 1 周期の角度の経時的変化は  $\theta_0 \rightarrow 0 \rightarrow -\theta_0 \rightarrow 0 \rightarrow \theta_0$  となる。

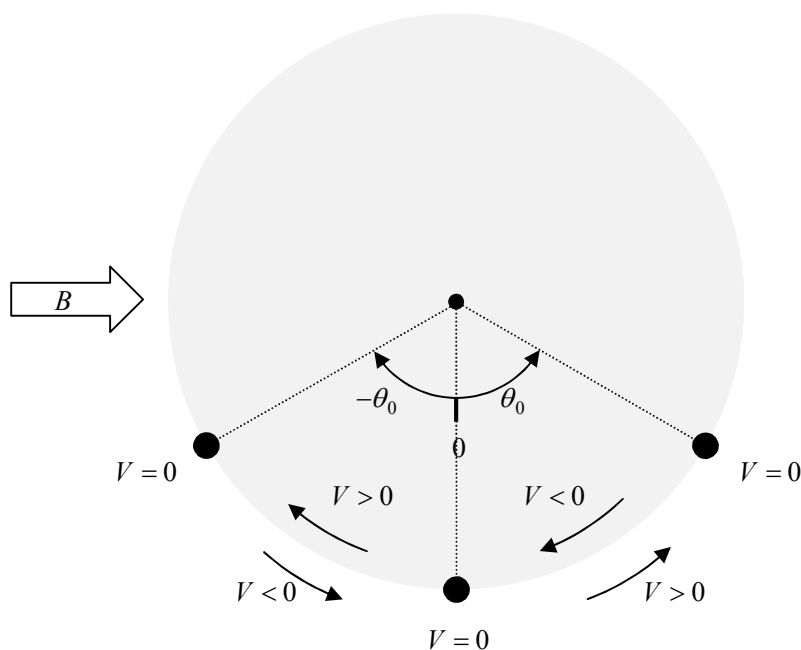
これと「力」の補足を参考に起電力の正負の経時的変化を調べると、下表のようになる。

よって、選択肢は(f)

$\theta$	$\theta_0$	...	0	...	$-\theta_0$	...	0	...	$\theta_0$
$V$	0	-	0	+	0	-	0	+	0

$V$  の正負について

ローレンツ力により、導体棒中の正電荷は、  
 導体棒が下に向かうときは Q から P へ移動するので起電力の向きは Q から P となり、  
 $V$  は負となる。したがって、導体棒が上に向かうときの  $V$  は正となる。



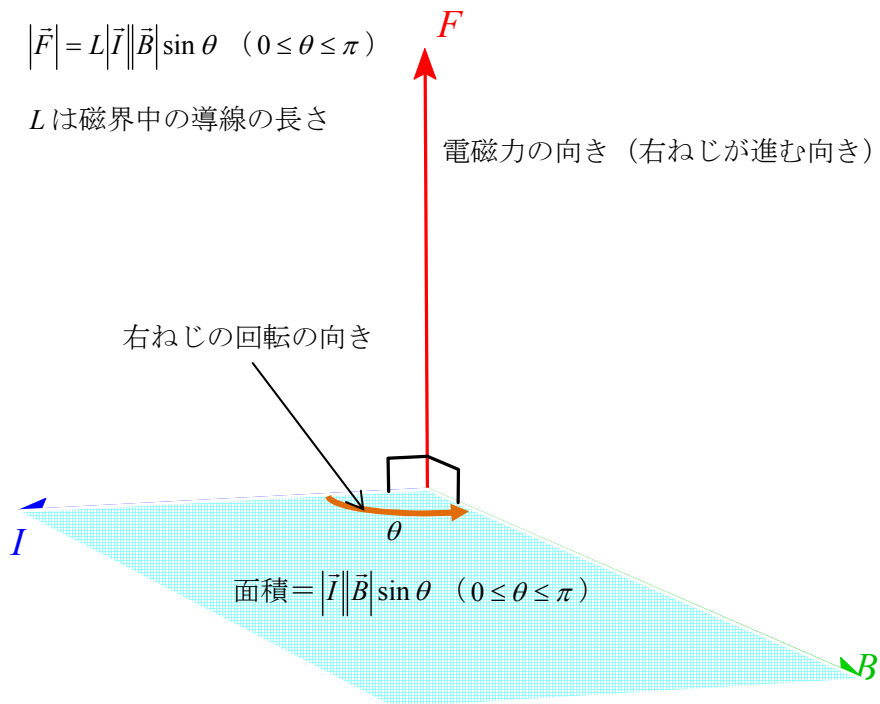
フレミング左手の法則と右ネジ

電磁力の向きはフレミングの左手の法則からのみならず、  
右ねじを  $I$  から  $B$  へ回転させたときのねじの進む向きからも求められる。

$$|\vec{F}| = L|\vec{I}||\vec{B}|\sin\theta \quad (0 \leq \theta \leq \pi)$$

$L$  は磁界中の導線の長さ

電磁力の向き (右ねじが進む向き)



(4)

◁  $a\omega BL$

解説

導体棒の速度を  $v$  とすると、起電力の大きさ  $|V| = |v \sin \theta \cdot BL|$

これと導体棒の円運動の速さは  $|v| = a\omega$  より、 $|V| = |a\omega \sin \theta \cdot BL|$

よって、 $\theta = \frac{\pi}{2}$  のとき、 $V_{\max} = a\omega BL$

◻  $RI \cos \omega t$

解説

直列回路だから、抵抗を流れる電流も  $I \cos \omega t$

よって、抵抗での電位降下、すなわち抵抗の両端にかかる電圧を  $V_R$  とすると、

$$V_R = RI \cos \omega t$$

◻  $\frac{I}{\omega C} \sin \omega t$

解説

コンデンサーの両端にかかる電圧の位相は電流の位相より  $\frac{\pi}{2}$  遅れることと、

容量リアクタンスが  $\frac{1}{\omega C}$  であることから、

$$\begin{aligned} V_C &= \frac{1}{\omega C} \cdot I \cos \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right) \\ &= \frac{I}{\omega C} \sin \omega t \end{aligned}$$

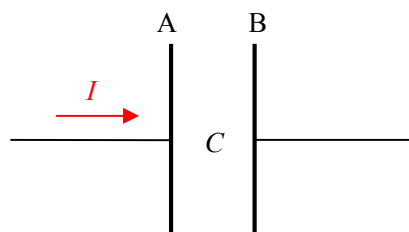
詳細

極板 B に対する極板 A の電位を  $V = V_0 \sin \omega t$  とすると、

$$Q = CV_0 \sin \omega t \quad \dots \textcircled{1}$$

極板 A に向かう電流の向きを正とすると、

$$I = \frac{dQ}{dt} \quad \dots \textcircled{2}$$



$$V_A - V_B = V_0 \sin \omega t$$



①, ②より,

$$\begin{aligned} I &= \frac{dQ}{dt} \\ &= CV_0 \frac{d \sin \omega t}{dt} \\ &= \omega CV_0 \cos \omega t \\ &= \omega CV_0 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

これより, コンデンサーの電圧の位相は電流のそれより  $\frac{\pi}{2}$  遅れることがわかる。

問題では, コンデンサーを流れる電流を  $I \cos \omega t$  としているから,

コンデンサーの電圧の位相は  $\omega t - \frac{\pi}{2}$  となる。

$$\text{よって, } V = V_0 \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = V_0 \sin \omega t$$

$$\text{これと } I = \omega CV_0 \text{ より, } V = \frac{I}{\omega C} \sin \omega t$$

$$\boxed{\text{答}} \quad \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

解説

$$\begin{aligned} V_R + V_C &= RI \cos \omega t + \frac{I}{\omega C} \sin \omega t \\ &= \sqrt{(RI)^2 + \left(\frac{I}{\omega C}\right)^2} \sin(\omega t + \alpha) \quad (\alpha \text{ は初期位相}) \\ &= I \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} \sin(\omega t + \alpha) \end{aligned}$$

$$\text{より, 電圧の最大値} = I \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

補足

$\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}$  は交流回路の抵抗に相当し, インピーダンス (記号は  $Z$ ) という。

自己リアクタンス  $L$  のコイル, 大きさ  $R$  の抵抗, 電気容量  $C$  のコンデンサーの

直列回路のインピーダンスは  $Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$  となる。

## 証明

回路を流れる電流を  $I \sin \omega t$  とすると,

$$\begin{aligned} V &= V_L + V_R + V_C \\ &= \omega L I \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) + RI \sin \omega t + \frac{I}{\omega C} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \omega L I \cos \omega t + RI \sin \omega t - \frac{I}{\omega C} \cos \omega t \\ &= \left\{ R \sin \omega t + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \cos \omega t \right\} \cdot I \\ &= \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \times I \sin(\omega t + \delta) \\ \\ \therefore Z &= \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \end{aligned}$$